

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ

ФАКУЛЬТЕТ ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ И ОБУЧЕНИЯ
ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ

МАТЕМАТИКА

Часть 2. Геометрия.

Учебно-методическое пособие для слушателей очно – заочных и заочных
подготовительных курсов.

Электронная версия

Лемешев В.П.

Гомель 2015 г.

Введение.

Данное пособие содержит основные понятия и соотношения школьного курса геометрии, необходимые для подготовки к централизованному тестированию по математике. Работа содержит наряду с формулами школьной программы большое количество формул, позволяющих связать различные свойства геометрических линий и их свойств вне привычных соотношений.

Пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов, занимающихся в рамках вечерней и очно-заочной форм обучения, а так же слушателей подготовительного отделения, сочетающих самостоятельную подготовку с аудиторной работой.

7.1. Планиметрия.

7.1.1. Прямоугольный треугольник.

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются катетами.

Треугольник, у которого все углы острые, называется *остроугольным*. Треугольник называется *тупоугольным*, если он содержит угол, больший 90 градусов (тупой).

В произвольном треугольнике против равных углов лежат равные стороны, и, наоборот, против равных сторон лежат равные углы. Против большего угла лежит большая сторона. Сумма двух любых сторон треугольника всегда больше третьей, разность двух любых сторон всегда меньше третьей.

Катет, противолежащий углу α , равен произведению гипотенузы на $\sin \alpha$.

Катет, прилежащий к углу α , равен произведению гипотенузы на $\cos \alpha$.

Катет, противолежащий углу α , равен произведению второго катета на $\operatorname{tg} \alpha$.

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

7.1.2. Равенство прямоугольных треугольников.

Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением.

Теорема 1. *Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 2. *Если сторона и прилежащий к ней острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны стороне и прилежащему к ней острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 3. *Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Из признаков подобия треугольников следует, что прямоугольные треугольники подобны тогда и только тогда, когда они содержат равный острый угол.

Теорема 4. *Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.*

Следствие 1. *Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.*

Следствие 2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

7.1.3. Теорема Пифагора и ее следствия.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

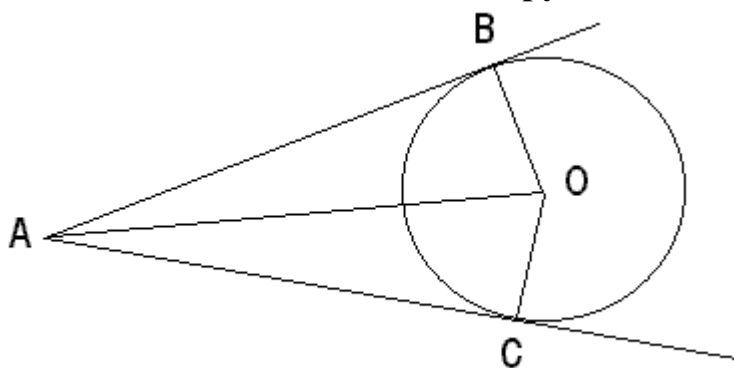
Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Следствие 1. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Следствие 2. $\cos \alpha < 1$ для любого острого угла α .

7.2. Основные формулы планиметрии.

7.2.1. Свойства окружности, вписанной в угол:



1. Отрезки касательных, проведённых из одной точки равны: $AB = AC$.
2. Радиусы окружности, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательным:
 $OB \perp AB, OC \perp AC$.
3. Центр окружности лежит

на биссектрисе угла: $\angle OAB = \angle OAC$.

$a^2 + b^2 = c^2$ - теорема Пифагора.

Соотношения между сторонами и углами.

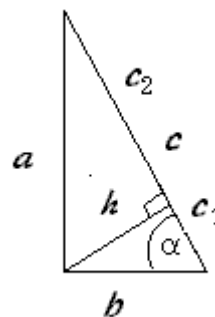
1. $\frac{b}{c} = \cos \alpha$; 5. Высота $h = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$, где

$c = c_1 + c_2$.

2. $\frac{a}{c} = \sin \alpha$;

3. $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$;

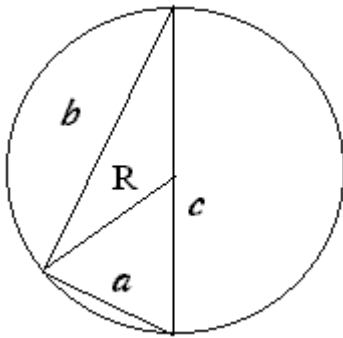
4. $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$.



Площадь треугольника. $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$.

7.2.2. Описанная окружность.

1. Центр описанной окружности расположен на середине гипотенузы c и равен её половине $R = \frac{c}{2}$. Медиана прямого угла равна половине гипотенузы $\frac{c}{2}$.



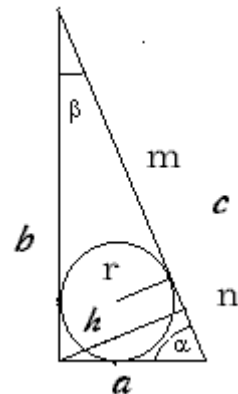
7.2.3. Вписанная окружность.

1. Радиус вписанной окружности равен $r = \frac{2S}{P} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$.

2. Если $c = m + n$, то $S = m \cdot n$.

3. Если $\frac{m}{n} = k$. То $\alpha, \beta = \frac{\pi}{4} \pm \arcsin \frac{\sqrt{2} \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{2 \left(\frac{m}{n} + 1 \right)}$.

4. Сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов:
 $d + D = 2r + 2R = a + b$.



5. $c = \frac{2r^2}{h - 2r}$ - длина гипотенузы через высоту, проведённую к ней и радиус вписанной окружности.

6. $\frac{P}{2} + r = a + b$ - сумма полупериметра треугольника и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

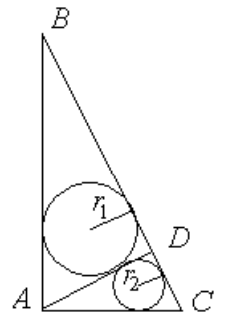
7. $S = r^2 + 2Rr$ - площадь прямоугольного треугольника через радиусы вписанной и описанной окружностей.

8. $l = a \sqrt{\frac{2c}{a+c}}$ - длина биссектрисы между катетом a и гипотенузой c .

9. $l = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ - длина биссектрисы прямого угла треугольника с катетами a и b .

10. В равнобедренном прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к высоте проведённой к гипотенузе равно $\sqrt{2} - 1$, т. е. $\frac{r}{h} = \sqrt{2} - 1$.

11. $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, где r - радиус вписанной окружности треугольника ABC , r_1, r_2 - радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ADC ($AD \perp BC$).



7.3. Основные планиметрические понятия.

Понятия точка, прямая, плоскость, расстояние от точки до точки, лежать между, величина угла являются неопределяемыми. Точки принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \dots$, а прямые - строчными: $a, b, c, d, \dots$. Прямые можно обозначать также двумя буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней. Плоскости обозначают, как правило, греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Основным свойством расположения точек на прямой является то, что из трёх различных точек на ней одна и только одна лежит между двумя другими.

Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками. Основным свойством измерения расстояний является то, что каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Длину отрезка AB называют также *расстоянием* между точками A и B . Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину.

Полупрямой или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек некоторой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точки. Эта точка называется *начальной точкой* полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой с общей начальной точкой называются *дополнительными*.

Углом называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной* угла, а полупрямые - *сторонами* угла. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развёрнутым*. Будем говорить, что луч *проходит между* сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

Основным свойством величины угла является:

Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен 180° . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. Сумма смежных углов равна 180° .

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми другого. Вертикальные углы равны.

Ломаной $A_1A_2A_3\dots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1A_2A_3\dots A_n$ называются *вершинами* ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ - *звеньями* ломаной. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. Ломаная называется *замкнутой*, если концы у неё совпадают.

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная, у которой соседние звенья не лежат на одной прямой. Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а звенья ломаной - *сторонами многоугольника*. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника. Называются *диагоналями*.

7.4. Произвольный треугольник.

Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки - его *сторонами* (рис. 1).

Углом *треугольника* ABC при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AC . Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C . Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах

Треугольники называются *равными*, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

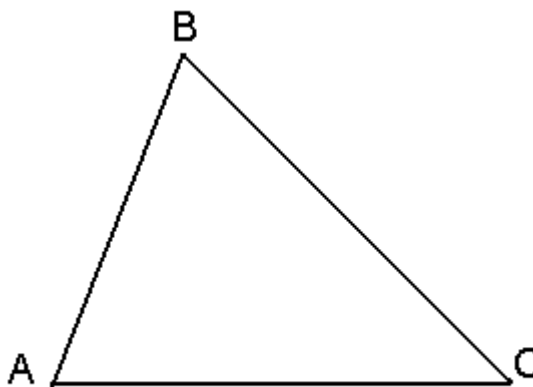


Рис. 1.

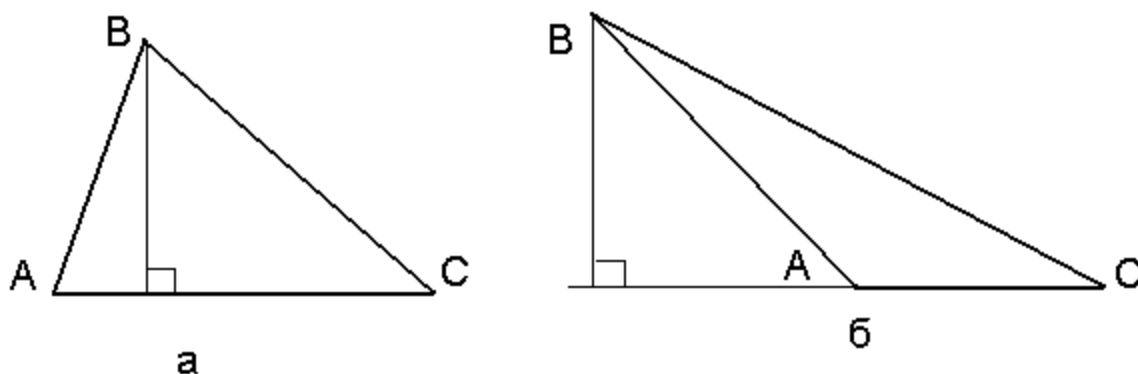


Рис.2.

На рис. 2 а. Основание высоты лежит на стороне треугольника. На рис. 2 б. - на продолжении стороны треугольника.

Биссектрисой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противоположащей стороне (рис.3).

Медианой треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположащей стороны треугольника (рис.4.)

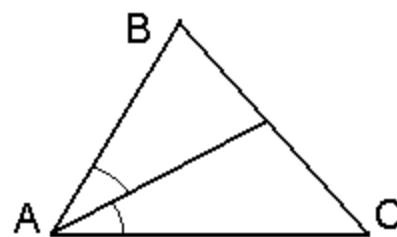


Рис.3.

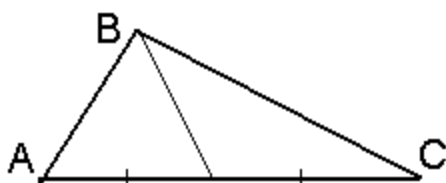


Рис.4.

Напомним, что треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются катетами.

Треугольник, у которого все углы острые, называется *остроугольным*. Треугольник называется *тупоугольным*, если он содержит угол, больший 90 градусов (тупой).

В произвольном треугольнике против равных углов лежат равные стороны, и, наоборот, против равных сторон лежат равные углы. Против большего угла лежит большая сторона. Сумма двух любых сторон треугольника всегда больше третьей, разность двух любых сторон всегда меньше третьей.

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов). Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без их удвоенного произведения на косинус угла между ними (теорема косинусов).

Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением.

Теорема 1. (Первый признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 2. (Второй признак равенства треугольников). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и*

двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 3. (Третий признак равенства треугольников). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема 4. *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

Теорема 5. *Сумма углов треугольника равна 180° .*

Следствие. У любого треугольника хотя бы два угла острые.

7.5. Равнобедренный треугольник и его свойства.

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

Теорема 1. (Свойство углов равнобедренного треугольника). *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним*.

Следствие. У равностороннего треугольника все углы равны.

Теорема 2. (Свойство медианы равнобедренного треугольника) *В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.*

7.6. Окружность, описанная около треугольника.

Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 1. *Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведённых через середины сторон.*

Следствие. Серединовые перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке.

7.7. Окружность, вписанная в треугольник.

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема 1. *Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.*

Следствие. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

7.8. Признаки подобия треугольников.

7.8.1. Признак подобия треугольников по двум углам (первый признак).

Теорема 1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

7.8.2. Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними (второй признак).

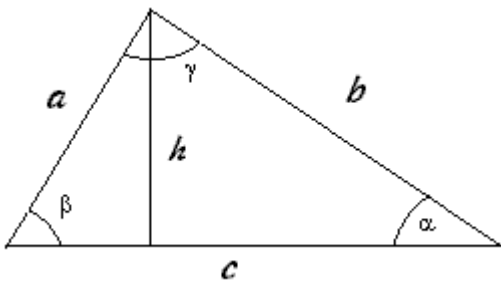
Теорема 2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

7.8.3. Признак подобия треугольников по трём сторонам (третий признак).

Теорема 3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

7.9. Основные формулы.

7.9.1. Формулы площади.



$$1. S = \frac{1}{2} c \cdot h.$$

$$2. S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma.$$

$$3. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2} -$$

формула Герона.

$$4. S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

7.9.2. Радиус вписанной окружности.

$$r = \frac{2S}{p} \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

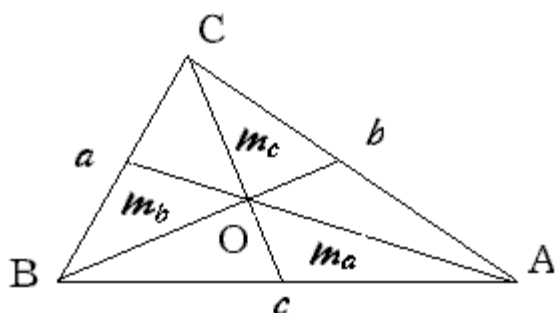
7.9.3. Радиус описанной окружности.

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

7.9.3. Соотношения между сторонами и углами.

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ - теорема косинусов;
2. $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ - теорема синусов.
3. $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$; 4. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p-b}{p-c} \frac{p-c}{bc}}$; 5. $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;
6. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p-b}{p-c} \frac{p-c}{p-a}}$ где $p = \frac{a+b+c}{2}$; 7. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;
8. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$; 9. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$;
10. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$; 11. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.
12. $\frac{P}{a} = \frac{h_a}{r}$, где P - периметр треугольника.

7.9.4. Медиана.



Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею, считая от вершины, в отношении 2:1.

Точка пересечения медиан, соединённая с вершинами, разбивает треугольник на три равные по площади

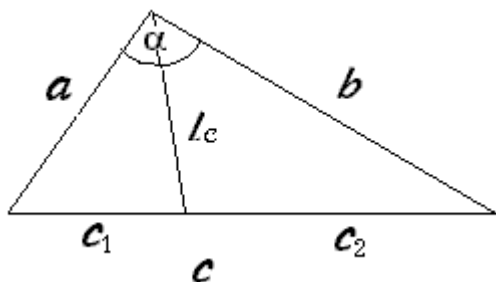
треугольника.

$$S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOA} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}.$$

1. $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ - выражение медианы через стороны треугольника;
2. $c = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}$ - выражение стороны треугольника через его медианы;
3. $S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_a + m_c - m_b)(m_b + m_c - m_a)}$ - площадь треугольника через его медианы;

7.9.5. Биссектриса.

Биссектриса – отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной и делящий угол пополам.



1. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим

сторонам, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a}{b}$, $\frac{c_1}{a} = \frac{c_2}{b}$;

2. $l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$ - выражение

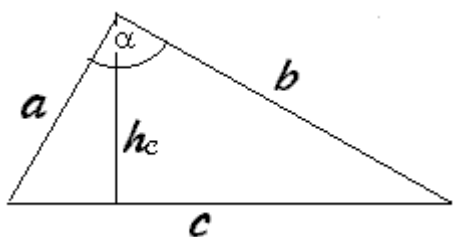
биссектрисы через стороны треугольника;

3. $l_c = \sqrt{ab - c_1 c_2}$ - выражение биссектрисы через боковые стороны и отрезки, на которые она делит основание;

4. $S = \frac{l_c \cdot (a+b) \sqrt{4a^2 b^2 - l_c^2 (a+b)^2}}{4ab}$ - выражение площади треугольника через биссектрису и стороны треугольника;

5. $l_c = \frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}$; 6. $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{(a+b) l_c}{2ab}$; 7. $\alpha = \arccos \frac{(a+b) l_c}{2ab}$.

7.9.6. Высота.



Высота - отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной и перпендикулярный ей.

1. $h_c = \frac{2S}{c}$;

2. $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, где r - радиус вписанной

окружности треугольника.

3. $a+b = \sqrt{c^2 + 2ch_c \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$.

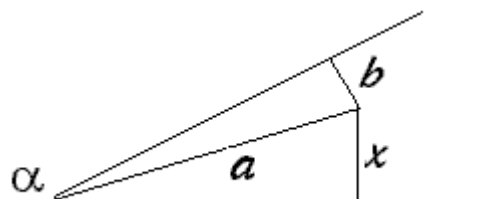
4. $a \cdot b = h_c \cdot 2R$.

5. $S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right)}}$ - площадь

треугольника через три его высоты.

6. Если дано расстояние от точки внутри угла α до одной его стороны b и расстояние до вершины угла a , то расстояние x от этой точки до другой стороны угла равно

$x = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \alpha - b \cos \alpha$.



7.9.7. Равнобедренный треугольник.

1. Центр вписанной окружности делит биссектрису угла

при основании в отношении $\frac{a+b}{b}$,

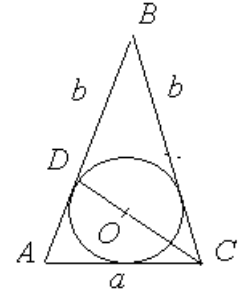
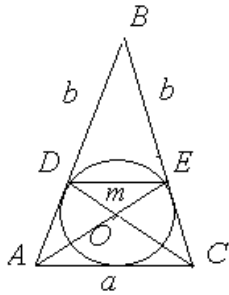
считая от вершины угла, т. е.

$$\frac{OC}{OD} = \frac{a+b}{b}.$$

2. Если D и E - точки пересечения

биссектрис и боковых сторон и $DE = m$, то основание

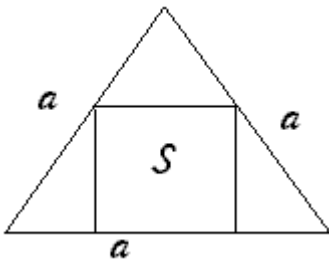
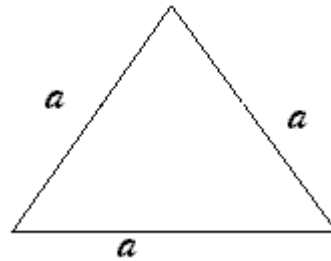
$$a = \frac{bm}{b-m}.$$



7.9.8. Равносторонний (правильный) треугольник.

$$1. S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad 2. h = m = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad 3. R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$4. r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Если в правильный треугольник со стороной a вписан квадрат, то его площадь S равна $S = 3a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

7.10. Параллелограмм.

7.10.1. Свойства и признаки параллелограмма.

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами* четырёхугольника, а соединяющие их отрезки - *сторонами* четырёхугольника.

Вершины четырёхугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника, называются *диагоналями*. Стороны четырёхугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними*.

сторонами. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими* сторонами.

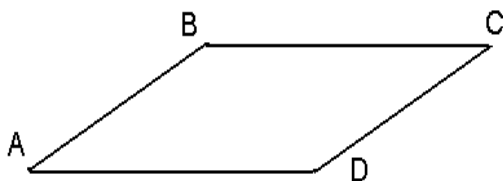


Рис. 1.

Параллелограмм - это четырёхугольник, у которого *противолежащие* стороны *параллельны*, т.е. лежат на *параллельных* прямых (рис. 1).

Теорема 1. (Признак параллелограмма) Если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник - параллелограмм. (Рис.2.)

Теорема 2. (Свойство параллелограмма). *Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Теорема 3. (Свойство параллелограмма). У параллелограмма *противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*

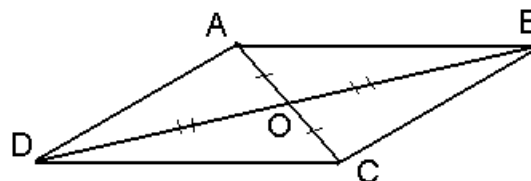


Рис. 2.

Теорема 4. (Признак параллелограмма). Если у четырёхугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

7.10.2. Свойства прямоугольника, ромба, квадрата.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Так как *прямоугольник* является *параллелограммом*, то он обладает всеми его свойствами (*противоположные стороны равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам*). Рассмотрим особое свойство *прямоугольника*.

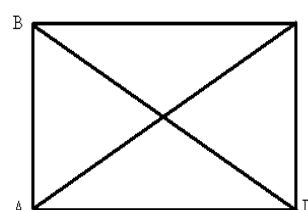


Рис. 3

Теорема 1. Диагонали прямоугольника равны. (Рис.3.)

Теорема 2. (Признак прямоугольника) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм - *прямоугольник*.

Ромбом (Рис. 4) называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как *ромб* является *параллелограммом*, то он обладает также всеми его свойствами. Рассмотрим его особое свойство.

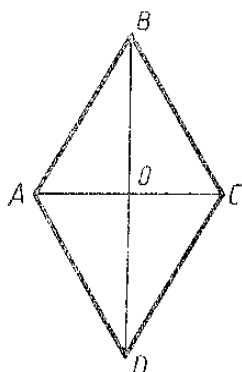


Рис. 4

Теорема 3. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Из этого определения следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.

Теорема 4. 1) *Все углы квадрата прямые.*

2) *Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.* (Рис. 5.)

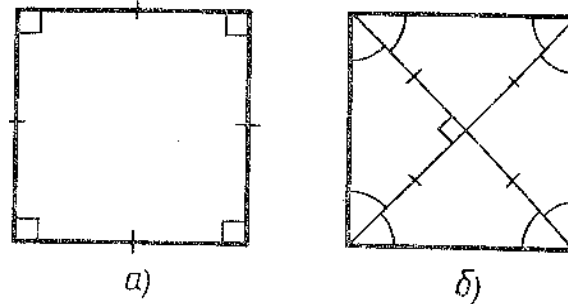
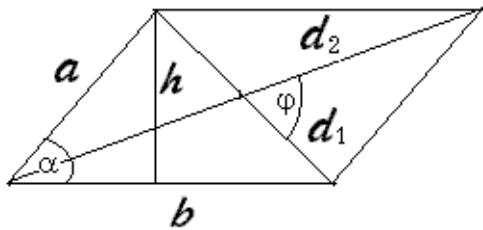


Рис. 5

Основные формулы.



1. $S = bh$;

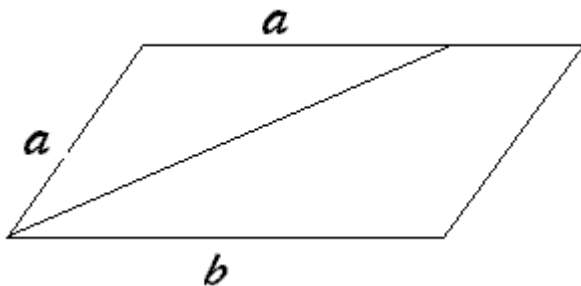
2. $S = ab \sin \alpha$; 3. $S = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$;

4. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$; 5. $S = \frac{b^2 - a^2}{2} \operatorname{tg} \varphi$;

6. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

7. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

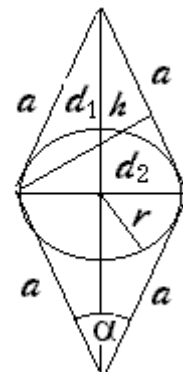
7.10.3. Свойство биссектрисы параллелограмма.



Биссектриса угла параллелограмма отсекает на противоположной стороне отрезок, равный боковой стороне.

7.10.4. Ромб.

1. Диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны.
2. Площадь S равна произведению сторон на синус угла между ними $S = ab \sin \alpha$;
3. Площадь S равна половине произведения



диагоналей $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$;

4. Высота h ромба равна $h = a \sin \alpha$;

5. Радиус r вписанной окружности равен $r = \frac{h}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2}$; 6.

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 4S}.$$

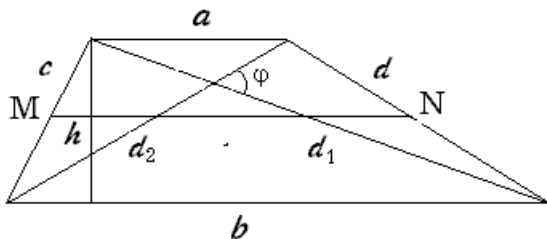
7.11. Трапеция.

7.11.1. Основные понятия.

Трапеция – четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две нет. Параллельные стороны называются *основаниями трапеции*. Две другие стороны называются *боковыми сторонами*. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины двух её боковых сторон.

7.11.2. Основные формулы.



$$MN = \frac{a+b}{2};$$

1. Площадь S трапеции равна $S = \frac{a+b}{2} h$,

или $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$, или

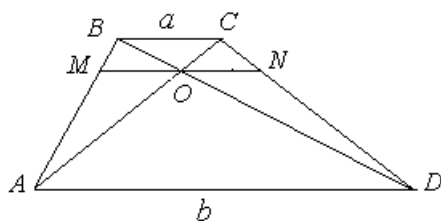
$$S = \frac{1}{2} h \left(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2} \right).$$

2. Средняя линия трапеции равна

3. Площади треугольников, образованных диагоналями трапеции, примыкающие к боковым сторонам, равны между собой, $S_1 = S_2$.

4. В трапецию можно вписать окружность только

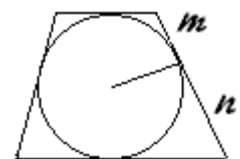
тогда, когда в ней суммы противоположных сторон равны $a + b = c + d$.



5. Описанная окружность существует только в равнобоких трапециях.

6. Если вписанная окружность делит боковую сторону трапеции на отрезки m и n , то площадь трапеции равна

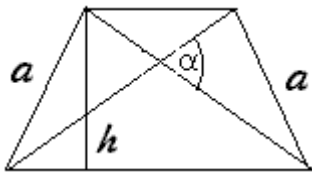
$$S = 2\sqrt{mn} (m+n).$$



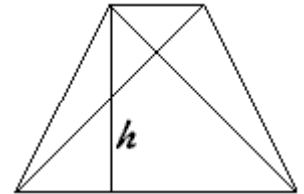
7. $MN = \frac{2ab}{a+b}$, где MN - отрезок, проходящий через точку O пересечения диагоналей параллельно основанию.
8. Если l - отрезок, проведённый параллельно основаниям и делящий площадь трапеции на две равные части, то $l = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

7.11.3. Равнобокая трапеция.

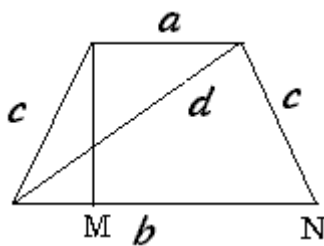
Трапеция называется равнобокой (равнобедренной), если у неё равны боковые стороны.



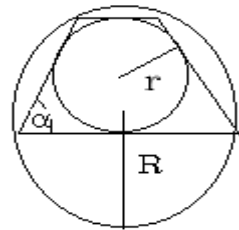
1. $S = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$; 2. $S = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.
2. Если в трапеции диагонали перпендикулярны, то её площадь равна квадрату высоты: $S = h^2$.



3. Диагональ d равнобокой трапеции равна $d = \sqrt{ab + c^2}$;
отрезок $MN = \frac{a+b}{2}$.



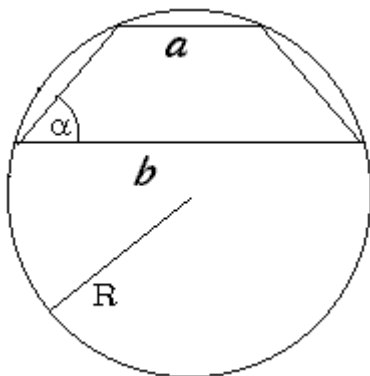
4. Если дан радиус вписанной окружности в равнобокую трапецию и острый угол α , то



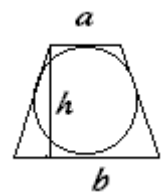
радиус R описанной окружности равен $R = \frac{r\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha}$.

6. Радиус описанной трапеции с острым углом α и основаниями a и b ,

равен $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}}{2 \sin^2 \alpha}$.



7. Если в равнобокую трапецию можно вписать окружность, то $h^2 = ab$.

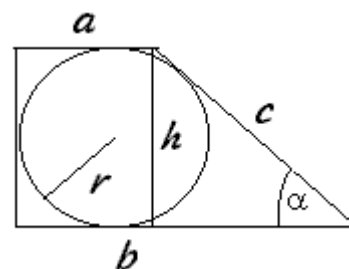


7.11.4. Прямоугольная трапеция.

Прямоугольная трапеция – трапеция, у которой два угла прямые.

$$1. S = \frac{2a + b \cos \alpha}{2} \cdot b \cos \alpha;$$

$$2. r = \frac{ab}{a+b}.$$



7.12. Окружность и круг.

7.12.1. Основные понятия.

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром окружности*.

Кругом радиуса r называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на расстояние не более r . Эта точка называется *центром круга* (рис. 1).

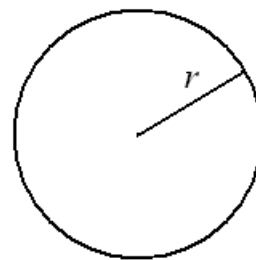


Рис. 1.

Расстояние от точек окружности до её центра называется *радиусом окружности (круга)*.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*.

Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*.

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*.

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку.

Часть окружности, лежащая между любыми двумя её точками называется *дугой*.

7.12.2. Центральные и вписанные углы. Измерение угла, вписанного в окружность.

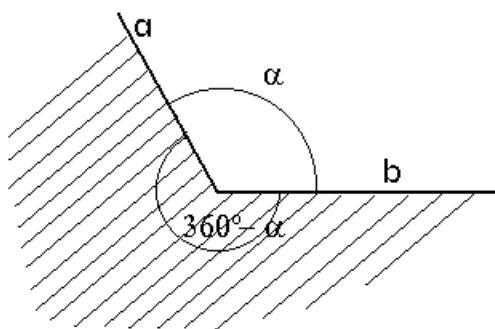


Рис. 2.

Угол разбивает плоскость на две части. Каждая из частей называется *плоским углом*. На рис. 2 заштрихован один из плоских углов со сторонами a и b . Плоские углы с общими сторонами a и b называются *дополнительными*.

Если плоский угол является частью полуплоскости, то его *градусной мерой* называется градусная мера обычного угла с теми же сторонами (на рис. 2 угол с градусной мерой α). Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера принимается равной $360^\circ - \alpha$, где α - градусная мера дополнительного плоского угла (рис. 2).

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным в окружность*. Угол BAC на рис. 3 вписан в окружность. Его вершина A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C .

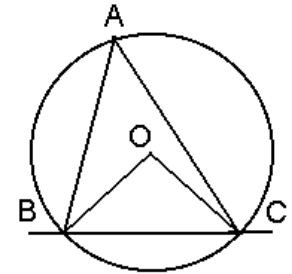


Рис. 3.

Говорят также, что угол A опирается на хорду BC . Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той из этих дуг, которая не содержит точку A , называется *центральный углом, соответствующим данному вписанному углу*.

Теорема. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

Следствие 1. Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB , равны.

Следствие 2. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр окружности, прямые.

В частности, на рис. 4 а) вписанные углы 1, 2 и 3 равны между собой. На рис. 4 б) углы 1 и 2 равны по 90° .

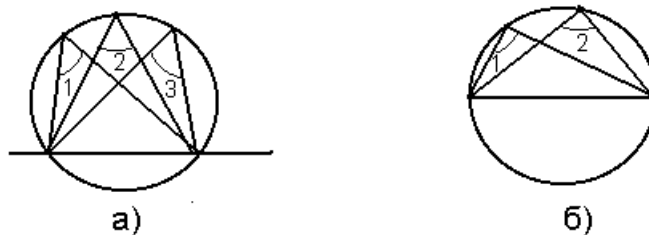


Рис.4.

7.12.3. Свойства касательных, проведённых к окружности из одной точки.

1. Касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны между собой, т. е. $OA = OB$ (рис. 5).

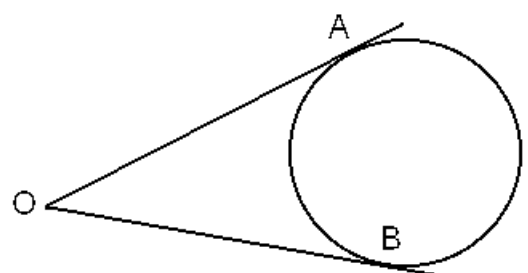


Рис. 5.

7.12.4. Свойства пересекающихся хорд.

2. Если хорды AB и CD пересекаются в точке O (рис. 6), то $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

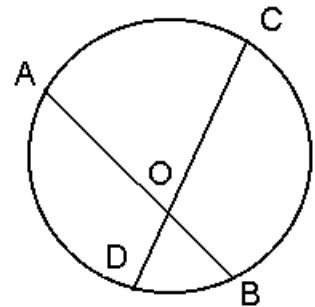


Рис. 6.

7.12.5. Окружность и многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности. В этом случае окружность называется *описанной* около многоугольника. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются окружности. В этом случае окружность называется *вписанной* в многоугольник.

Пусть R - радиус описанной, а r - радиус вписанной окружностей в правильный n - угольник, сторона которого равна a . Тогда

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

В частности, для правильного треугольника при $n = 3$, имеем

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного четырёх угольника (квадрата) при $n = 4$, имеем

$$R = a, \quad r = \frac{a}{2}.$$

Для правильного шестиугольника при $n = 6$, имеем

$$R = a, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

7.12.6. Длина окружности. Радианная мера угла. Площадь круга.

Теорема. Отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.

Отношение длины окружности к диаметру обозначается греческой буквой π , т. е. $\frac{l}{2R} = \pi$. Число π - иррациональное. Его приближённое значение равно $\pi \approx 3,1416\dots$

Таким образом, *длина окружности* вычисляется по формуле $l = 2\pi R$.

Рассмотрим окружность, радиуса R (рис. 7.). Центральный угол, соответствующий длине дуги, равной радиусу R считается равным одному радиану. Так как длина окружности в 2π раз больше радиуса R , то углу в 360° соответствует угол в 2π радиан, углу в 180° - угол в π радиан, углу в 90° - угол в $\frac{\pi}{2}$ радиан и т. д. Такое измерение углов называется *радианной мерой*.

Другими словами, *радианной мерой угла* является отношение длины дуги, соответствующей этому углу, к радиусу окружности.

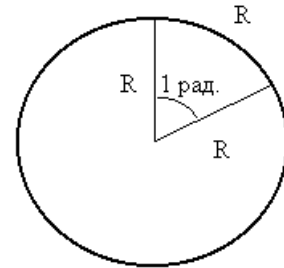


Рис. 7.

Градусная мера угла в один радиан равна $1 \text{ рад.} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$. Это значит, что радианная мера угла получается из градусной умножением на $\frac{\pi}{180^\circ}$.

Площадь правильного многоугольника вычисляется по формуле $S = \frac{pr}{2}$, где p - периметр многоугольника, r - радиус вписанного в него круга. В случае, когда число сторон многоугольника n неограниченно возрастает, периметр его сколь угодно близко приближается к длине окружности l . Площадь многоугольника при этом сколь угодно близко приближается к площади круга. Таким образом, площадь круга равна

$$S = \frac{lr}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2.$$

7.12.7. Длина дуги окружности. Площадь сектора и сегмента.

Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому углу. *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Теорема 1. *Длина дуги окружности радиуса r , соответствующая центральному углу в α радиан равна $l = r\alpha$. Если угол α задан в градусах, то $l = \pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$ (рис. 8).*

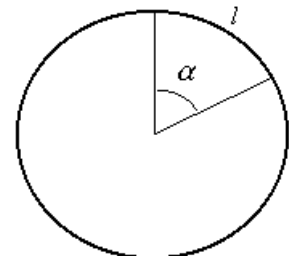


Рис. 8.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называется часть круга, отсечённая хордой.

Теорема 2. Площадь кругового сектора окружности радиуса r , соответствующего центральному углу в α радиан равна $S = \frac{\alpha r^2}{2}$. Если угол α задан в градусах, то $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \alpha$ (рис. 9).

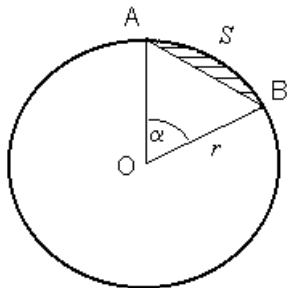


Рис. 10.

Теорема 3. Площадь кругового сегмента окружности, радиуса r , соответствующего углу в α радиан равна $S = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$ (рис. 10).

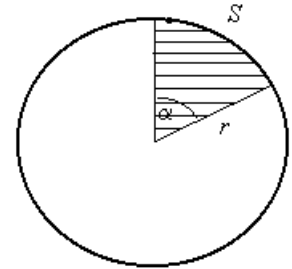
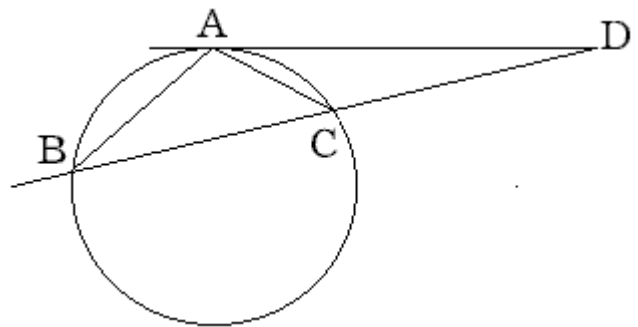


Рис. 9.

7.12.8. Основные формулы.

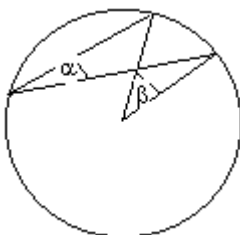
7.12.8.1. Свойство секущей и касательной.

Если из точки D к окружности проведены касательная DA и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки D до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки D до точек её пересечения с окружностью, т. е. $DA^2 = DB \cdot DC$;



7.12.8.2. Измерение вписанных углов.

Вписанный угол – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её.

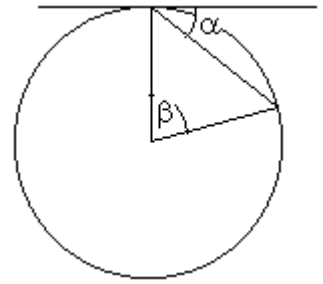


Центральный угол – угол, вершина которого лежит в центре окружности.

1. Вписанный угол α равен половине соответствующего центрального угла β , т. е. $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

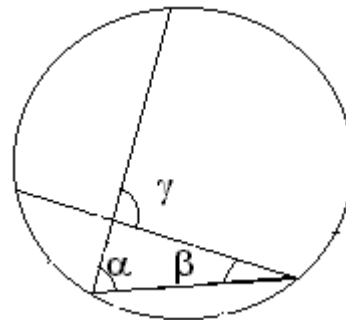
7.12.8.3. Угол между хордой и касательной.

1. Угол α , образованный хордой и касательной, имеющими общую точку на окружности, равен половине соответствующего центрального угла β , т. е. $\alpha = \frac{\beta}{2}$.



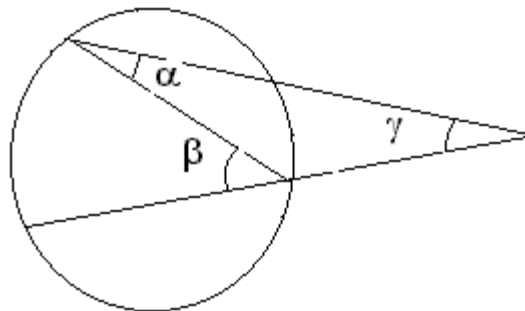
7.12.8.4. Угол между хордами.

1. $\gamma = \alpha + \beta$;

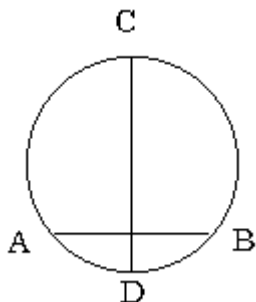


7.12.8.5. Угол между секущими.

1. $\gamma = \beta - \alpha$;

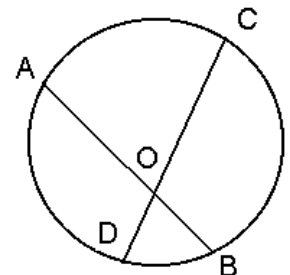


7.12.8.6. Хорда, пересекающаяся с диаметром.

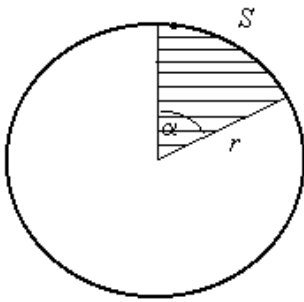


1. Если хорда AB пересекает диаметр CD под прямым углом, то $AC^2 + BD^2 = 4R^2$, где R - радиус окружности.

2. Если хорды AB и CD пересекаются в точке O , то $AO \cdot OB = CO \cdot OD$;



7.12.8.7. Площадь сектора и сегмента.



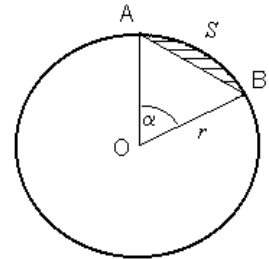
1. Площадь кругового сектора окружности радиуса r , соответствующего центральному углу в α радиан равна

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}. \text{ Если угол } \alpha \text{ задан в}$$

градусах, то $S = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \alpha$.

2. Площадь кругового сегмента окружности, радиуса r , соответствующего углу в α радиан

$$\text{равна } S = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha).$$



8. Стереометрия.

8.1. Многогранники.

Пространственная фигура называется *ограниченной*, если существует шар, содержащий эту фигуру. Примерами ограниченных фигур являются: тетраэдр, куб, цилиндр и др. Полупространство, двугранный угол – неограниченные фигуры.

Объединение ограниченной пространственной области и её границы называется *телом*.

Граница тела называется его *поверхностью*. Пространственная область тела – его *внутренней областью*.

Многогранником называется тело, поверхность которого есть объединение конечного числа многоугольников.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его *гранями*, стороны этих многоугольников – *рёбрами*, а вершины – *вершинами многогранника*.

Отрезок, который соединяет две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

Если все грани многогранника – равные правильные многоугольники и число рёбер, выходящих из каждой вершины, одинаково, то многогранник называется *правильным*. Примером такого многогранника является куб.

Призмой называется многогранник, две грани которого равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, и любые два ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны. Многоугольники называются *основаниями* призмы, остальные грани (параллелограммы) – *боковыми гранями*, объединение всех боковых граней – *боковой поверхностью* призмы.

Призма, боковые рёбра которой перпендикулярны плоскости основания, называется *прямой*. Если боковые рёбра призмы не перпендикулярны плоскостям оснований, то её называют *наклонной*.

Перпендикуляр к плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат этим плоскостям, называется *высотой* призмы.

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется *диагональным*.

Параллелепипедом называется призма, основание которой есть параллелограмм. Таким образом, все грани параллелепипеда являются параллелограммами.

Диагональю параллелепипеда называется отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Параллелепипед, боковые рёбра которого перпендикулярны плоскости основания, называется *прямым*.

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется *прямоугольным*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники.

Длины непараллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами (измерениями)*.

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину. Многоугольник называется *основанием* пирамиды.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми рёбрами* пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *правильной*, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая её высоту.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой*.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Пирамида называется *n - угольной*, если её основанием является *n - угольник*. Треугольная пирамида, все рёбра которой равны, называется *тетраэдром*.

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, другой называется *усечённой пирамидой*. Грани усечённой пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями пирамиды*, остальные грани – *боковыми гранями*.

Усечённая пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется *правильной*.

Пусть некоторая плоскость пересекает многогранник. Часть плоскости, лежащая в внутренней области многогранника называется *сечением многогранника*. Сама плоскость в этом случае называется *секущей*.

Сечение выпуклого многогранника есть выпуклый плоский многоугольник, вершины которого в общем случае являются точками пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника, а стороны – с его гранями.

Для построения прямой пересечения плоскостей находят две её точки и проводят через них прямую. Для построения точки пересечения прямой и плоскости находят в плоскости прямую, пересекающую данную. Тогда искомая точка получается в пересечении найденных прямых.

8.2. Тела вращения.

Телом вращения называется фигура, полученная при вращении некоторой линии вокруг прямой. Эта линия описывает некоторую поверхность, ограничивающую тело вращения, которая называется *поверхностью вращения*. Прямая, вокруг которой происходит вращение линии, называется *осью вращения*.

Сечением тела вращения называется непустое пересечение этого тела и плоскости. Сечение, проходящее через ось вращения называется *осевым сечением*.

Цилиндром (круговым цилиндром) называется тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону. Поверхность цилиндра состоит из двух равных кругов, называемых *основаниями цилиндра*, и его боковой поверхности, которая образуется при вращении стороны прямоугольника, параллельной оси.

Высотой цилиндра называется отрезок, перпендикулярный плоскостям оснований и имеющий концы на этих основаниях.

Отрезок, соединяющий точки окружностей оснований и перпендикулярный к их плоскостям, называется *образующей цилиндра*. Длина образующей равна длине высоты цилиндра.

Прямоугольник, длина высоты которого равна длине окружности основания цилиндра, а высота – высоте цилиндра, называется *развёрткой боковой поверхности цилиндра*.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центр его основания параллельно образующей.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*.

Касательной плоскостью цилиндра называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно к осевому сечению, проведённому через эту образующую.

Призмой, вписанной в цилиндр, называется призма, плоскости оснований которой совпадают с плоскостями оснований цилиндра, а боковые рёбра являются образующими цилиндра.

Призма называется *описанной около цилиндра*, если плоскости её оснований являются плоскостями оснований цилиндра, а грани касаются боковой поверхности.

Конусом (круговым конусом) называется тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. Поверхность, образованная вращением гипотенузы, называется *боковой поверхностью конуса*, а вторым катетом – *основанием конуса*.

Отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания, называются *образующими* конуса.

Конус называется *прямым*, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания.

Прямая, проходящая через вершину конуса перпендикулярно его основанию, называется *осью* конуса, а её отрезок между вершиной и основанием – его *высотой*.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым*.

Плоскость, проходящая через образующую конуса, перпендикулярно к осевому сечению, проведённому через эту образующую, называется *касательной плоскостью*.

Пирамидой, вписанной в конус, называется пирамида, вершина которой совпадает с вершиной конуса, а основанием является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса. Боковые рёбра пирамиды при этом являются образующими конуса.

Пирамида называется *описанной около конуса*, если её вершиной является вершина конуса, а основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса.

Усечённым конусом называется часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние – радиусом шара. Границы шара называются *шаровой поверхностью* или *сферой*.

Радиусом шара называется отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой его поверхности.

Диаметром шара называется отрезок, соединяющий две точки шара и проходящий через его центр.

Сферой называется множество всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эту точку называют *центром сферы*, а расстояние, на которое удалены все точки сферы от центра – *радиусом сферы*.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной*.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется *большим кругом*.

Касательной плоскостью шара называется плоскость, проходящая через некоторую точку шаровой поверхности перпендикулярно радиусу, проведённому в точку касания. Саму точку при этом называют *точкой касания*.

Прямая, проходящая через некоторую точку шаровой поверхности, перпендикулярно радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*.

8.3. Основные формулы.

8.3.1. Призма.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot a$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

Объём.

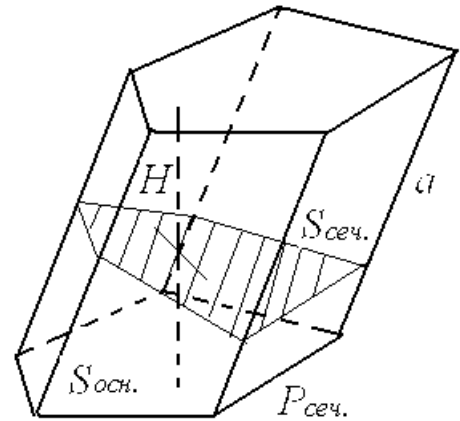
$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = S_{\text{сеч.}} \cdot a.$$

Где: $P_{\text{сеч.}}$ - периметр перпендикулярного сечения,

H - высота призмы,

a - боковое ребро,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания призмы.



8.3.2. Прямая призма.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot a$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

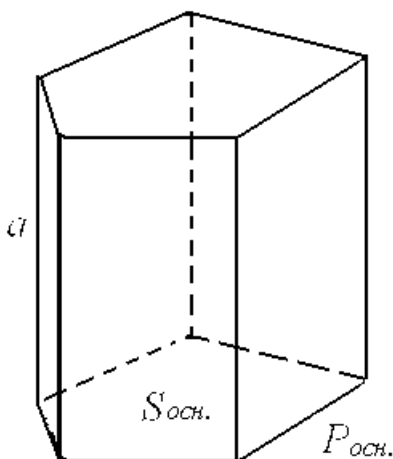
Объём.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot a.$$

Где: $P_{\text{осн.}}$ - периметр основания прямой

a - боковое ребро,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания призмы.



призмы,

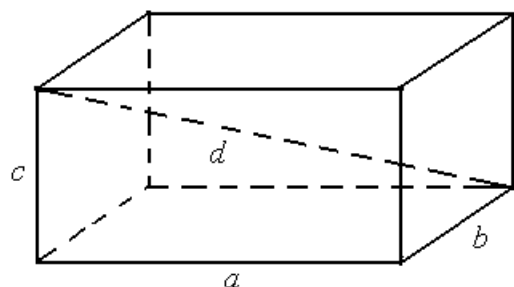
8.4. Прямоугольный параллелепипед.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок.}} = 2(a + b)c.$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн.}} = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$



Объём.

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

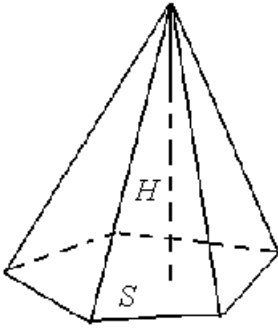
Диагональ.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Где: a, b, c - измерения параллелепипеда,
 d - диагональ параллелепипеда.

8.5. Пирамида.

Объём.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Где: S - площадь основания пирамиды,
 H - высота пирамиды.

8.5.1. Правильная пирамида.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h.$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

Объём.

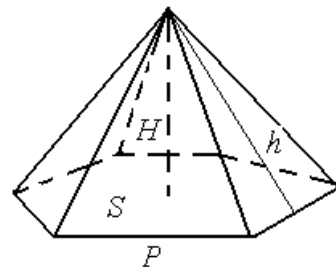
$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

Где: P - периметр основания,

S - площадь основания,

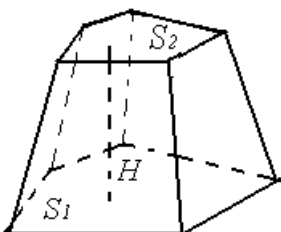
H - высота пирамиды,

h - апофема пирамиды.



8.5.2. Усечённая пирамида.

Объём.



$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

Где: S_1 - площадь нижнего основания,
 S_2 - площадь верхнего основания,
 H - высота.

8.5.3. Правильная усечённая пирамида.

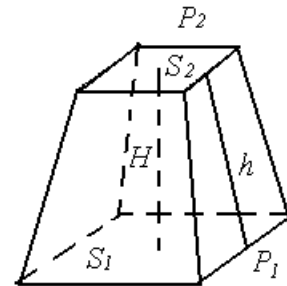
Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}h(P_1 + P_2)$$

Объём.

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

Где: S_1 - площадь нижнего основания,
 S_2 - площадь верхнего основания,
 P_1 - периметр нижнего основания,
 P_2 - периметр верхнего основания,
 H - высота пирамиды,
 h - апофема.



8.6. Цилиндр.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(H + R)$$

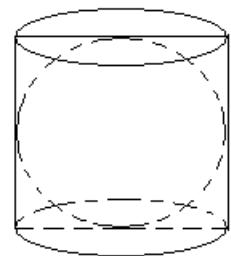
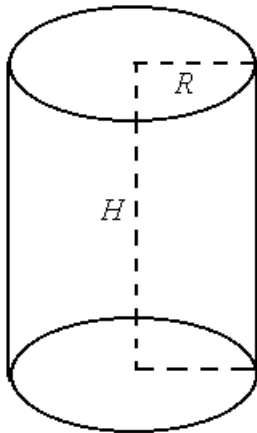
Объём.

$$V = \pi R^2 H.$$

Где: R - радиус оснований, H - высота цилиндра.

Если в цилиндр вписан шар, то

$$V_{\text{ц}} = \frac{3}{2}V_{\text{ш}}$$



8.7. Конус.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок}} = \pi R l.$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн}} = \pi R (R + l)$$

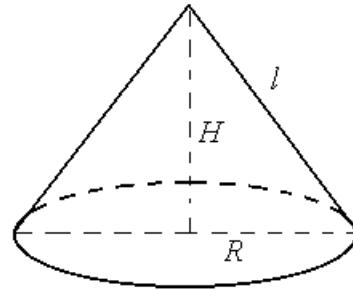
Объём.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Где: R - радиус основания,

H - высота конуса,

l - образующая.



8.8. Усечённый конус.

Боковая поверхность.

$$S_{\text{бок}} = \pi (R + r) l$$

Полная поверхность.

$$S_{\text{полн}} = \pi (R^2 + r^2 + l^2 + Rl + rl)$$

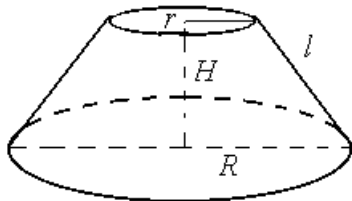
Объём.

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

Где: R, r - радиусы оснований,

H - высота конуса.

l - образующая усечённого



конуса.

8.9. Сфера.

Формула площади сферы.

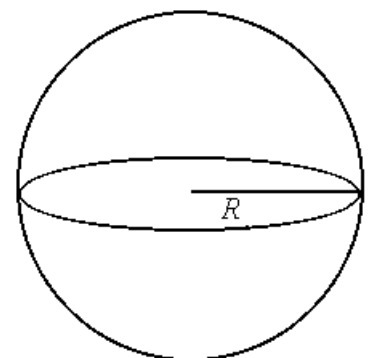
$$S = 4\pi R^2.$$

Формула объёма шара.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Где:

R - радиус сферы (шара).



8.9.1. Шаровой сегмент и шаровой слой.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

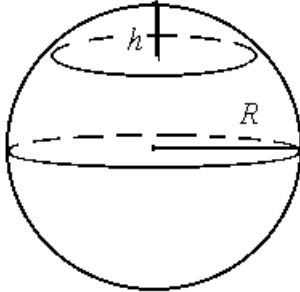
Площадь сегментной поверхности.

$$S_{\text{сег.}} = 2\pi Rh.$$

Объём сегмента.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (R + h)$$

Где: R - радиус шара, h - высота сегмента.

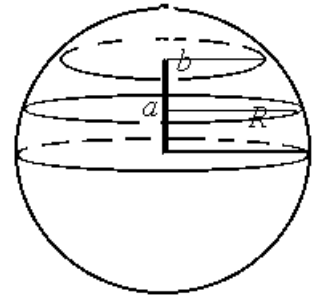


8.9.2. Объём шарового слоя.

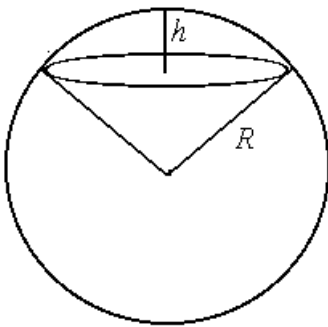
$$V = \pi R^2 \left(b - a \right) - \frac{\pi}{3} \left(b^3 - a^3 \right)$$

Где: R - радиус шара,

a, b - расстояния от центра шара до секущих плоскостей.



8.9.3. Шаровой сектор.



Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса. Причём, если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основание является основанием сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус, из него удаляется.

Объём шарового сектора.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Где: R - радиус шара, h - высота сегмента.